



Aalborg Universitet

**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

## Notat vedr.: Fortegnsregning ved snitkraftbestemmelser

Heshe, Gert

*Publication date:*  
1994

*Document Version*  
Tidlig version også kaldet pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*  
Heshe, G. (1994). *Notat vedr.: Fortegnsregning ved snitkraftbestemmelser*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet.

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Notat  
vedr.  
**FORTEGNSREGNING**  
ved  
snitkraftbestemmelser

AUC, d. 27.09.94  
Gert Heshe

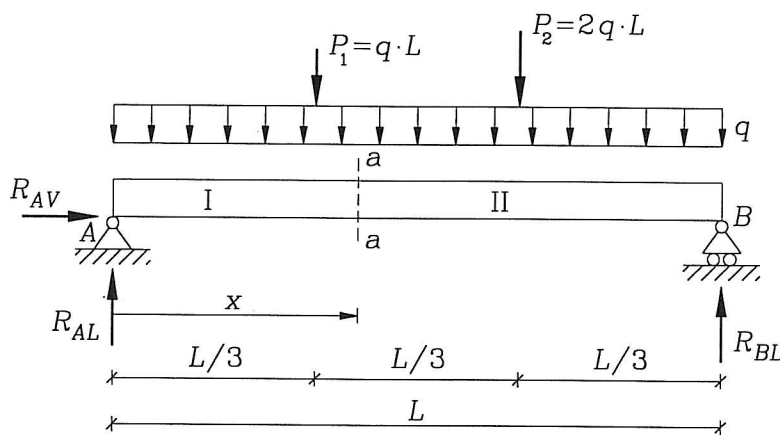
## Notat vedr. fortegnsregning ved snitkraftbestemmelser

Det er uhyre vigtigt, især hvis man skal samarbejde med andre, at man anvender en hel præcis fortegnsdefinition og gennemfører den i hele projektet.

Der kan laves mange forskellige fortegnsdefinitioner, og i princippet kan den ene være lige så god som den anden, men det vil være fornuftigst at vælge den fortegnsdefinition, som benyttes i de fleste lærebøger og publikationer.

Nedenfor vil fortegnsdefinitionen anvendt i Knud P. Christiansens "Statisk Bestemte Konstruktioner" blive beskrevet, men beskrevet på en anden måde end i lærebogen.

Lad os betragte f.eks. en træbjælke med spændvidden  $L$  påvirket af en jævnt fordelt last  $q$  og 2 enkeltkræfter  $P_1 = q \cdot L$  og  $P_2 = 2qL$ , se figur 1.



Figur 1

Med den viste faste simple understøtning ved A og bevægelige simple understøtning ved B forekommer der 3 understøtningsreaktioner, som vist i figur 1, nemlig  $R_{AL}$ ,  $R_{AV}$  og  $R_{BL}$ .

Tænkes bjælken savet igennem i et snit vinkelret på bjælkeaksen f.eks. ved snit  $a - a$  vist i figur 1, vil bjælken falde ned som 2 dele, nemlig del I og del II.

Ved kun at tænke sig til snittet  $a - a$  vil bjælken blive liggende i ligevægt på understøtningerne, hvilket må betyde, at de 2 bjælkelede I og II i det tænkte snit påvirker hinanden med 2 kraftsystemer, der er lige store, men modsat rettede. Prøv f.eks. at trykke 2 håndflader mod hinanden, hvis berøringsfladen er i ro, d.v.s. der er ligevægt, vil den trykkraft, som den ene håndflade påvirker den anden med, være lige så stor, som den trykkraft, som den anden påvirker den første med, men modsat rettet.

Det er i MEK 0.1 afsnit 1.8 side 25 vist, at et vilkårligt plant kraftsystem kan ækvivaleres med en enkeltkraft  $R_1$  lig kraftsystemets vektorsum angribende i et vilkårligt punkt og et moment lig med kraftsystemets moment i punktet.

Fortsætter men nu tankeeksperimentet, at bjælken skæres over i snit  $a - a$ , og at man fjerner bjælkelede II mod, at der i stedet for på bjælkelede I i snitfladen, som kaldes et

normalsnit, tilføjes det kraftsystem, hvormed bjælke I påvirker bjælke II i den givne belastningstilstand. Dette kraftsystem, der er afhængig af den måde, hvorpå bjælken belastes, kan ifølge det foranstående ækvivaleres med en enkeltkraft  $R_1$  og et moment  $M$ , som vist i figur 2a sammen med de ydre belastninger, der består af den jævnt fordelte  $q$ -last,  $P_1$ ,  $R_{AV}$  og  $R_{AL}$ . Kraftsystemet, der påvirker bjælke I i snit  $a - a$ , er henført til tværsnittets tyngdepunkt.

Resultanten  $R_1$  opløses i dens komponenter  $N$ , der er orienteret i bjælkens systemlinies retning, der er vinkelret på normalplanen og den lodrette komponent  $V$ , der ligger i normalsnittets plan, se figur 2b.

Man har derved fået et kraftsystem bestående af  $N$ ,  $V$  og  $M$ , der er ækvivalent med kraftsystemet bestående af  $R_1$  og  $M$ . Se figur 2a og 2b.

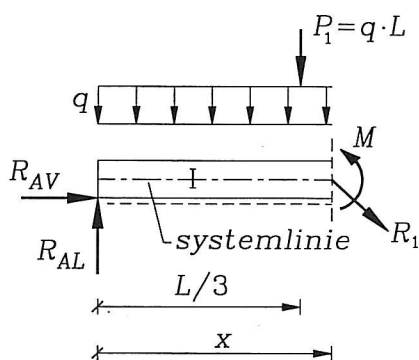


fig2a

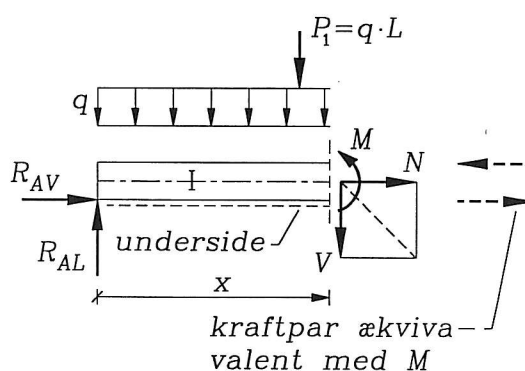


fig2b

Figur 2

$N$ ,  $V$  og  $M$  kaldes med en fællesbetegnelse de til snit  $a - a$  hørende snitkræfter.

$N$  benævnes snittets normalkraft

$V$  benævnes snittets forskydningskraft

$M$  benævnes snittets bøjningsmoment

Da bjælken ikke falder ned, når de 2 bjælkelede påvirker hinanden, betyder det, at bjælke I bliver i sin stilling, når den påvirkes af snitkræfterne  $N$ ,  $V$  og  $M$ , som jo netop er det kraftsystem, hvormed bjælke II påvirker bjælke I.

Dette er ensbetydende med, at de krav, der må stilles til størrelsen af  $N$ ,  $V$  og  $M$ , er, at de sammen med de ydre kræfter  $R_{AV}$ ,  $R_{AL}$ ,  $P_1$  og  $q$  skal holde bjælke I i ligevægt, d.v.s. kraftsystemet bestående af  $N$ ,  $V$ ,  $M$ ,  $R_{AV}$ ,  $R_{AL}$ ,  $P_1$  og  $q$  skal være ækvivalent med nul.

Som fortegnsgenstand for snitkræfterne skal flg. anbefales, idet betegnelser m.m. fremgår af figur 1 og 2.

- Vælg en gennemløbsretning  $x$  i konstruktionen.
- Definer en underside for den betragtede konstruktionsdel, der angives ved at tegne en punkteret linie langs den side af konstruktionsdelen, der er den definerede underside. Ved vandrette eller skrå bjælker er det indlysende, hvilken side der er undersiden (angiv den alligevel), men ved lodrette bjælker, f.eks. i rammekonstruktioner, kan begge sider principielt være "undersiden".
- Betragter man et tværsnit, hvor gennemløbsretningen er ud af normalsnittet som i figur 2, så vil positive værdier for snitkræfterne have flg. orientering.

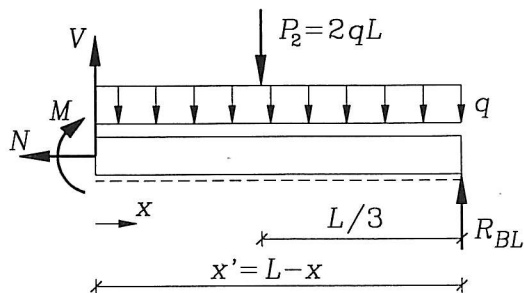
$N$  regnes positiv som en trækraft i gennemløbsretningen.

$V$  regnes positiv i retningen fra systemliniens (oftest en linie der går gennem normalsnittenes tyngdepunkt) skæring med normalsnittet mod bjælkeundersiden.

$M$  regnes positiv, når det kraftpar med kræfter parallelle med gennemløbsretningen, der er ækvivalent med  $M$ , er en trykkræft (modsat rettet gennemløbsretningen  $x$ ) ved bjælkeoversiden og en trækraft (i gennemløbsretningen  $x$ ) ved bjælkeundersiden.

Det kraftsystem, hvormed bjælke I påvirker bjælke II, er modsat rettet, men ellers identisk med det kraftsystem, hvormed bjælke II påvirker bjælke I, hvilket følger af Newtons 3. lov om aktion og reaktion.

Hvis bjælke II, se figur 1, betragtes, fås derfor de i figur 3 viste retninger for snitkræfterne



Figur 3

Bemærk, at der er indført en ny parameter  $x' = L - x$ , men gennemløbsretningen  $x$  fra venstre mod højre er stadig den samme.

Af figuren ses, at når gennemløbsretningen er ind i normalsnittet, så regnes  $N$  positiv som træk imod gennemløbsretningen,  $V$  regnes positiv i retningen bort fra den side, der er defineret som bjælkeunderside, og ækvivaleres momentet  $M$  med et kraftpar med kræfter parallelle med gennemløbsretningen, vil et positivt moment give kræfter i kraftparret, der trækker i bjælketværsnittet ved bjælkeundersiden og trykker ved bjælkeoversiden.

Valget af bjælkedel, der regnes på, afgøres ved, at der vælges den bjælkedel, der vil give de færreste regninger, hvilket som regel er den bjælkedel, hvorpå der virker færrest kræfter, men beregningerne skal give samme resultat, uanset om beregningerne gennemføres for bjælkedel I eller bjælkedel II.

Det er nu muligt at bestemme snitkræfternes forløb hen gennem bjælken for den i figur 1 viste bjælke med belastning.

Først findes reaktionerne  $R_{AV}$ ,  $R_{AL}$  og  $R_{BL}$  ved at bruge ligevægtsbetingelserne for hele det kraftsystem  $R_{AV}$ ,  $R_{AL}$ ,  $R_{BV}$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  og  $q$ , der virker på bjælken, dvs. udtrykke at kraftsystemet er ækvivalent med nul. Ved opstillingen af ligningerne til bestemmelse af  $R_{AV}$ ,  $R_{AL}$  og  $R_{BV}$  benyttes figur 1.

Vandret projektion (vp):  $R_{AV} = 0$

Moment om B (MOB):  $R_{AL} \cdot L - q \cdot L \cdot \frac{1}{2}L - q \cdot L \cdot \frac{2}{3}L - 2q \cdot L \cdot \frac{L}{3} = 0$   
 $R_{AL} = 1,83q \cdot L$

Moment om A (MOA):  $R_{BL} \cdot L - q \cdot L \cdot \frac{1}{2}L - q \cdot L \cdot \frac{1}{3}L - 2q \cdot L \cdot \frac{2}{3}L = 0$   
 $R_{BL} = 2,17q \cdot L$

Lodret projektion (LP)  $R_{AL} + R_{BL} - q \cdot L - q \cdot L - 2q \cdot L \stackrel{?}{=} 0$

som kontrol:  $(1,83 + 2,17 - 1 - 1 - 2)q \cdot L = 0$  O.K.

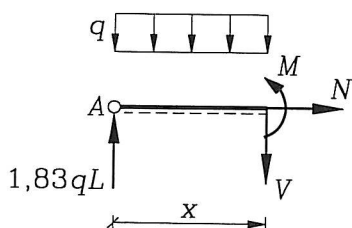
Da der opstår diskontinuiteter i snitkraftkurverne for  $N$  og  $M$  ved enkeltkræfterne  $P_1$  og  $P_2$ , er det nødvendigt at opstille ligevægtsbetingelserne til bestemmelse af snitkræfterne  $N$ ,  $V$  og  $M$  i 3 intervaller nemlig

$$0 \leq x < \frac{1}{3}L, \quad \frac{1}{3}L < x < \frac{2}{3}L \quad \text{og} \quad \frac{2}{3}L < x \leq L$$

I det følgende vises bjælken ved sin systemlinie.

$0 \leq x < \frac{1}{3}L$ : Der lægges et snit i afstanden  $x$  fra understøtningen, se figur 4, og bjælkedelen til venstre for snittet betragtes, idet alle påvirkningerne inklusive de ubekendte snitkraftstørrelser  $N$ ,  $V$  og  $M$  påføres den betragtede bjælkedel. Bemærk, at  $N$ ,  $V$  og  $M$  herved bliver funktioner af  $x$ .

Bemærk, at den beregnede værdi af  $R_{AL}$  er påført med sin størrelse og retning.



v.p.:  $N = 0$

L.p.:  $V - 1,83qL + q \cdot x = 0 \rightarrow V = q(1,83L - x)$

$x = 0$ :  $V = 1,83ql$

$x = \frac{1}{3}L - \Delta$ :  $V = 1,50ql$

Figur 4

$x = \frac{1}{3}L - \Delta$  betyder umiddelbart til venstre for  $x = \frac{1}{3}L$

Moment om  $N$  og  $V$ 's skæringspunkt:

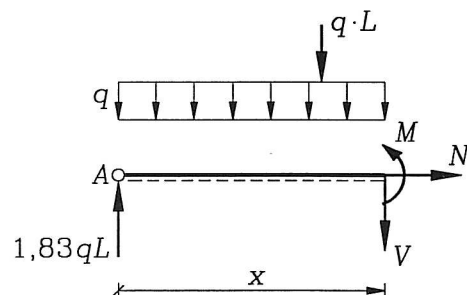
$$M - 1,83q \cdot L \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{1}{2}x = 0 \rightarrow M = q(1,83Lx - \frac{1}{2}qx^2)$$

$$x = 0 : M = 0$$

$$x = \frac{1}{3}L : M = 0,55qL^2$$

Hermed er snitkraftkurvernes forløb kendt i intervallet  $0 \leq x < \frac{1}{3}L$  og kan optegnes, se side 7.

$$\frac{1}{3}L < x < \frac{2}{3}L$$



Figur 5

Ved opstilling af ligevægtsbetingelser fås flg.:

$$\text{v.p.: } N = 0$$

$$\text{L.p.: } V - 1,83qL + qL + q \cdot x = 0$$

$$V = q(0,83L - x)$$

$$x = \frac{1}{3}L + \Delta : V = 0,50ql$$

$$x = \frac{2}{3}L - \Delta : V = 0,16qL$$

$x = \frac{1}{3}L + \Delta$  betyder umiddelbar til højre for  $x = \frac{1}{3}L$

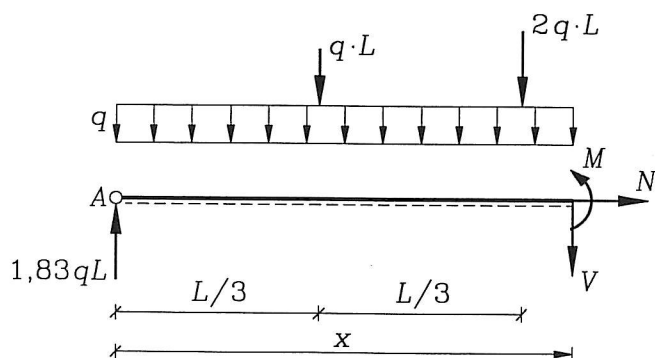
$$\text{Momentligning: } M - 1,83qLx + q \cdot x \cdot \frac{1}{2}x + qL(x - \frac{1}{3}L) = 0$$

$$M = -\frac{1}{2}qx^2 + 0,83qLx + \frac{1}{3}qL^2$$

$$x = \frac{1}{3}L + \Delta : M = 0,55qL^2$$

$$x = \frac{2}{3}L - \Delta : M = 0,664qL^2$$

$$\frac{2}{3}L < x < L:$$



Figur 6

Ved opstilling af ligevægtsbetingelser fås:

$$\text{v.p.: } N = 0$$

$$\text{L.p.: } V - 1.83qL + qL + 2qL + qx = 0 \rightarrow V = -q(1.17L + x)$$

$$x = \frac{2}{3}L + \Delta : V = -1.84qL$$

$$x = L - \Delta : V = -2.17qL$$

Bemærk, at  $V$  her er lig  $-R_B$ .

$$\text{Momentligning: } M - 1.83qLx + qx \cdot \frac{x}{2} + qL(x - \frac{1}{3}L) + 2qL(x - \frac{2}{3}L) = 0$$

$$M = -\frac{1}{2}qx^2 - 1.17qLx + \frac{5}{3}qL^2$$

$$x = \frac{2}{3}L + \Delta : M = 0.664qL^2$$

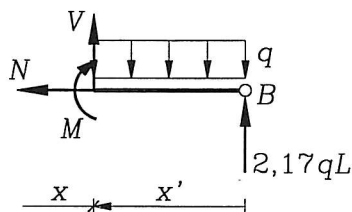
Samme værdi som beregnet for  $x = \frac{2}{3}L - \Delta$ , hvilket er en kontrol, da der ikke skal forekomme et spring i momentkurven, men kun et knæk, hvor bjælken angribes af en enkeltkraft.

$$x = L : M = 0$$

hvilket også er en kontrol, da momentet i charniet ved understøtning  $B$  skal være nul.

Beregningerne i intervallet  $\frac{2}{3}L < x < L$  kan gennemføres simplere ved at se på bjælkedelen til højre for snittet  $a-a$  i stedet for som ovenfor at se på bjælkedelen til venstre for snittet.

I henhold til fortegnsgenstandens definition side 3 påføres snitkræfterne på den løsskårne højre bjælkedel, som vist i figur 7.



Lettelserne i beregningerne fremkommer ved at enkeltkræfterne  $P_1$  og  $P_2$  nu ikke indgår direkte i beregningerne, men indgår indirekte gennem værdien  $2.17qL$  for  $R_{BL}$ .

Figur 7

Bemærk, at gennemløbsretningen stadig er  $x$  fra venstre mod højre, men der er indført en ny parameter  $x' = L - x$ , d.v.s.  $x'$  er beliggende i intervallet  $0 < x' < \frac{1}{3}L$ .

$$\text{v.p.: } N = 0$$

$$\text{1.p.: } V + 2.17qL - q \cdot x' = 0 \rightarrow V = q(-2.17L + x')$$

$$x' = 0 : V = -2.17qL$$

$$x' = \frac{1}{3}L - \Delta : V = -1.84qL$$

altså samme resultat som ovenfor for  $x = \frac{2}{3}L + \Delta$ , hvilket er en kontrol på beregningerne.

$$\text{Momentligning: } M - 2.17qL \cdot x' + q \cdot x' \cdot \frac{x'}{2} = 0$$



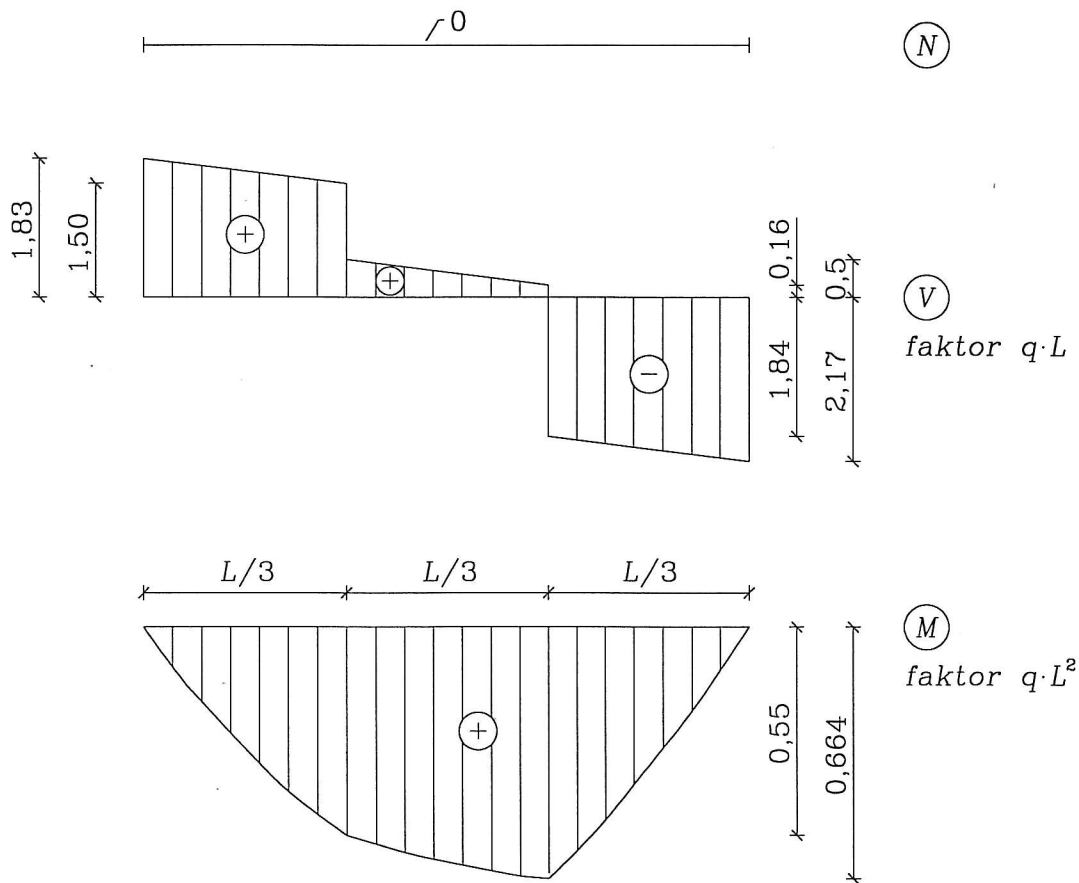
$$M = -\frac{1}{2}q(x')^2 + 2.17q \cdot Lx'$$

$$x' = 0 : M = 0$$

$$x' = \frac{1}{3}L : M = 0.668ql$$

Her konstateres en lille afvigelse på  $\Delta M = 0.004qL$  fra resultatet ovenfor. Afvigelsen skyldes en afrundingsfejl, idet reaktionerne  $R_{AL}$  og  $R_{BL}$  kun er beregnet med 2 decimaler.

På baggrund af foranstående beregningsopstillinger kan grafer visende snitkræfternes variation henover bjælken nu tegnes, som vist i figur 8.



Figur 8

Bemærk, at hvor bjælken påvirkes af enkeltkræfter, forekommer der spring i  $V$  kurven, og springet er netop lig enkeltkraftens størrelse, samt knæk i momentkurven.

AUC, d. 27.09.94

*G. Heshe*  
Gert Heshe